ما يجب أن أعرفه حتى أقول : إني استوعبت هذا الدرس

1 – يجب أن أعرف كيفية تحديد جملة ميكانيكية حسب ما يُطلب مني في السؤال .
2 – يجب أن أفرق بين المرجع من جهة ومعلم الفضاءات والأزمنة من جهة أخرى .
3 – يجب أن أعرف كيفية حساب سرعة لحظية لمتحرك في نقطة من مساره بواسطة مخطط .
4 – يجب أن أعرف كيفية حساب تسارع لحظي لمتحرك بواسطة التغير في شعاع السرعة .
5 – يجب أن أعرف القوانين الثلاثة لنيوتن وكيفية تطبيقها على الجُمَل الميكانيكية .
6 – يجب أن أعرف ما هي القوى التي تجعل القمر الصناعي مستقرا على مداره حول الأرض .
7 – يجب أن أعرف القوانين الثلاثة لكبلر .

ملخص الدرس

القوى الداخلية والقوى الخارجية في جملة

القوى الداخلية في جملة ميكانيكية تنعدم مثنى مثنى ، وتبقى القوى الخارجية هي المسؤولة عن حركة هذه الجملة .

المعلم والمرجع : حجرة المخبر مرجع ندرس بالنسبة له حركة سقوط كرية ، هذا لا يكفي لدراسة عناصر الحركة ، لهذا نزوّد المرجع بمعلم ، مثلا $(O,\vec{k})$. ، ثم نختار لحظة نعتبرها مبدأ للزمن .

المرجع السطحي أرضي : نقطة من سطح الأرض (المخبر مثلا) : ننسب إليه الحركات على الأرض والتي لا تدوم كثيرا .

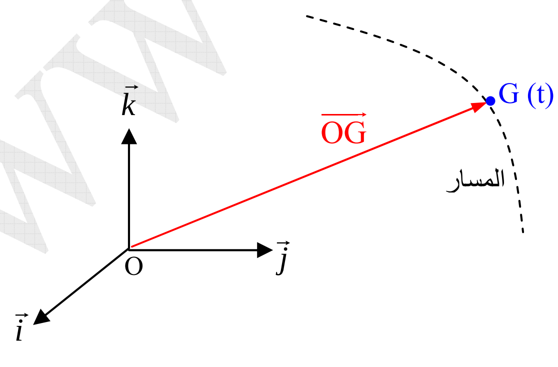
المرجع المركزي أرضي : مركز الأرض مزود بمعلم محاوره متجهة نحو ثلاثة نجوم ثابتة .

المرجع المركزي شمسي : مركز الشمس مزود بمعلم محاوره متجهة نحو ثلاثة نجوم ثابتة

عناصر الحركة :

شعاع الموضع : هو الشعاع $\overrightarrow{OG}$ الذي يجمع بين مبدأ الإحداثيات وموضع مركز عطالة الجسم في اللحظة (t) .

$$\overrightarrow{OG} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



شعاع السرعة : هو مشتق شعاع الموضع بالنسبة للزمن : $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$

وهو مماس للمسار في كل لحظة .

G
v
a

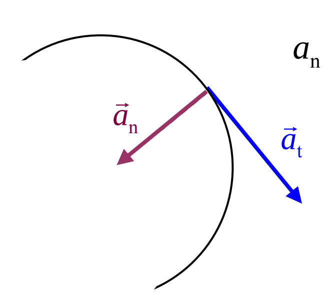
شعاع التسارع : هو مشتق شعاع السرعة بالنسبة للزمن $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ ، وهو المشتق الثاني لشعاع الموضع بالنسبة للزمن

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}$$

$$\overrightarrow{OG} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \qquad \vec{v} = \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases} \qquad \vec{a} = \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

التسارع المماسي والناظمي :

في معلم فريني (Frenet) التسارع المماسي $a_t = \frac{dv}{dt}$ ، والتسارع الناظمي (المركزي) $a_n = \frac{v^2}{R}$



طبيعة الحركة :

$\vec{a} \times \vec{v} > 0$: الحركة متسارعة

$\vec{a} \times \vec{v} < 0$: الحركة متباطئة

$\vec{a} \times \vec{v} = 0$: الحركة مستقيمة منتظمة إذا كان $\vec{a} = 0$ ، ودائرية منتظمة إذا كان $\vec{a} \perp \vec{v}$

الحركة الدائرية المنتظمة	الحركة المستقيمة المنتظمة	الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام
$\alpha = \omega t$ $\omega = \frac{v}{R}$ $a = a_n$ $a_t = 0$ $v = Cst \;;\; \vec{v} \neq Cst$ المعادلة الزمنية : $\alpha = \omega t + \alpha_0$	$d_{A\to B} = vt$ $v = Cst$ $a_t = 0$ $a_n = 0$ المعادلة الزمنية : $x = vt + x_0$	$d_{A\to B} = \frac{1}{2}at^2 + v_A t$ $v_B - v_A = at$ $v_B^2 - v_A^2 = 2a(AB)$ $a = a_t$ $a_n = 0$ المعادلة الزمنية : $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

قوانين نيوتن : (نقتصر على الملخص فقط)

القانون الأول : في معلم غاليلي إذا كان شعاع سرعة مركز عطالة جملة ثابتا ، فإن مجموع القوى الخارجية المؤثرة على الجملة يكون معدوما . والعكس كذلك صحيح $\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_G = Cst$

القانون الثاني :

في معلم غاليلي يكون مجموع القوى الخارجية المؤثرة على جملة كتلتها m متناسبا في كل لحظة مع تسارع الجملة ، أي :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

القانون الثالث :

إذا أثرت جملة A بفعل ميكانيكي على جملة B مُنَمذج بقوة $\vec{F}_{A/B}$ ، فإن الجملة B تؤثر في نفس الوقت على الجملة A بفعل مُنَمذج بقوة $\vec{F}_{B/A}$ ، بحيث يكون هذان الفعلان متعاكسين ومربوطين بالعلاقة : $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$

حركة الكواكب والأقمار الصناعية

- يدور كوكب في مسار دائري (فرضا) حول الشمس بسرعة $v = \sqrt{G\dfrac{M_s}{r}}$

G : ثابت الجذب العام ، M_s كتلة الشمس ، r البعد بين مركزي الشمس والكوكب .

- يدور قمر صناعي في مسار دائري (فرضا) حول الأرض بسرعة $v = \sqrt{G\dfrac{M_T}{r}}$

G : ثابت الجذب العام ، M_T كتلة الأرض ، r البعد بين مركز الأرض والقمر الصناعي .

زمن دورة (الدور) : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{GM}}$ ، M : كتلة الشمس أو الأرض .

قوانين كبلر

القانون الأول : في المرجع الشمسي مركزي تتحرك الكواكب في مدارات إهليليجية حول الكوكب الجاذب بحيث يكون هذا الأخير أحد محرقيها .

تكملة حديثة للقانون الأول : في المرجع الأرضي مركزي تدور الأقمار الصناعية في مدارات إهليليجية أحد محرقيها مركز الأرض .

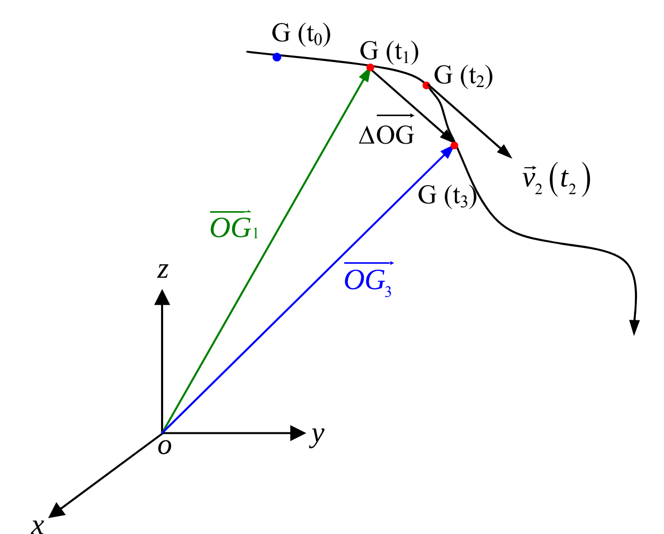
القانون الثاني : (قانون المساحات) : يمسح المستقيم الواصل بين مركز الكوكب السيار ومركز الكوكب الجاذب مساحات متساوية في مُدَد زمنية متساوية .

القانون الثالث : في مرجع شمسي مركزي ، تكون النسبة بين مربعات أدوار الكواكب ومكعبات أنصاف المحاور الكبيرة لمداراتها ، دائما ثابتة .

لا تتعلّق هذه النسبة إلا بالكوكب أو النجم الجاذب . $\dfrac{T^2}{a^3} = k$

I - الحركات

1 - شعاع السرعة اللحظية



شعاع السرعة في اللحظة t_2 هو $\vec{v}_2 = \dfrac{\vec{OG}_3 - \vec{OG}_1}{t_3 - t_1}$

شعاع السرعة يكون موازيا لشعاع الانتقال $\Delta\vec{OG} = \vec{OG}_3 - \vec{OG}_1$

يكون تحديد $\vec{v}_2$ بأكثر دقة كلما اقتربت t_3 من t_1 ، وبالتالي :

شعاع السرعة اللحظية هو المشتق بالنسبة للزمن لشعاع الموضع $\vec{OG}$.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OG}}{dt}$$

مثال : يتحرك جسم نعتبره نقطة في معلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، تُعطى إحداثيات المتحرك في كل لحظة t كما يلي :

$x = 3\,t - 1$ ، $y = 2\,t^2 - 1$ ، $z = t^2 + 2\,t$

1 – اكتب عبارة شعاع الموضع ، ثم عيّن وضعية المتحرك في اللحظة $t = 2$ s

2 – اكتب عبارة شعاع السرعة ، ثم احسب طويلة السرعة في اللحظة $t = 1$ s

الحل :

1 - شعاع الموضع هو : $\vec{OG} = (3t-1)\vec{i} + (2t^2-1)\vec{j} + (t^2+2t)\vec{k}$

في اللحظة $t = 2$ s يكون $\vec{OG} = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 8\vec{k}$

2 – شعاع السرعة :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OG}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

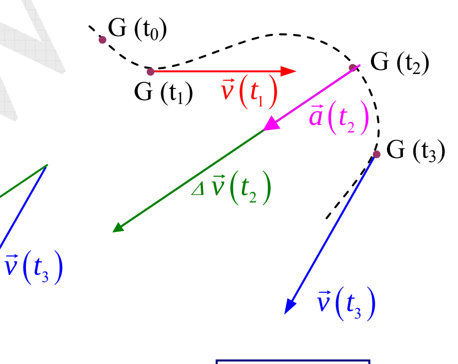
$$\vec{v} = 3\vec{i} + 4t\,\vec{j} + (2t+2)\vec{k}$$

عند $t = 1$ s يكون شعاع السرعة $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\,\vec{j} + 4\vec{k}$ ، وطويلته $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{9+16+16} = 6{,}4\ m/s$

2 - شعـاع التسارع اللحظي :



يُعبّر شعاع التسارع عن تغير شعاع السرعة خلال الزمن .



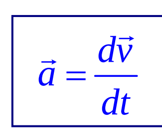
شعاع التسارع محمول على شعاع التغير في السرعة $\Delta\vec{v}$.

شعاع التسارع في اللحظة t_2 هو :

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_1}{t_3 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

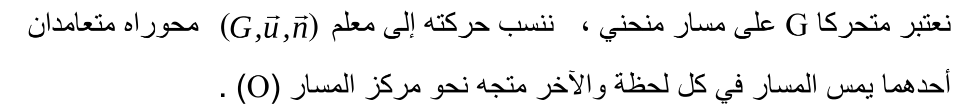
كلما اقترب t_3 من t_1 كلما كان تحديد شعاع التسارع دقيقا أكثر .

عندما ينتهي t_3 نحو t_1 يصبح $\vec{a}$ مشتق شعاع السرعة بالنسبة للزمن



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

3 - التسارع المماسي والتسارع الناظمي (المركزي)



نعتبر متحركا G على مسار منحني ، ننسب حركته إلى معلم $(G,\vec{u},\vec{n})$ محوراه متعامدان أحدهما يمس المسار في كل لحظة والآخر متجه نحو مركز المسار (O) .

شعاع السرعة يكون دائما محمولا على المماس ، ومنه نكتب :

$\vec{v} = v\,\vec{u}$ ، وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن :

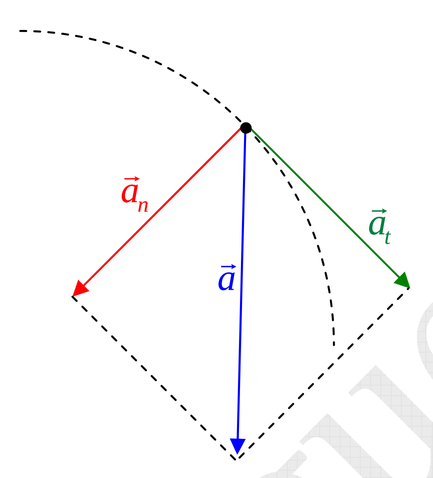
$\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv}{dt}\vec{u} + v\dfrac{d\vec{u}}{dt}$ (شعاع الوحدة $\vec{u}$ متغير المنحى)

ومنه التسارع $\vec{a}$ عبارة عن تسارعين :

التسارع المماسي محمول على المماس : $\vec{a}_t = \dfrac{dv}{dt}\vec{u}$ طويلته $a_t = \dfrac{dv}{dt}$

التسارع الناظمي متجه نحو المركز (فيسمى المركزي) $\vec{a}_n = v\dfrac{d\vec{u}}{dt}$ ، طويلته تُقبل بدون برهان $a_n = \dfrac{v^2}{R}$.

حيث R هو نصف قطر المسار .



تحليل بعدي لعبارة التسارع : $[a] = \dfrac{\dfrac{[D]}{[T]}}{[T]} = \dfrac{[D]}{[T]^2} = [D][T]^{-2}$ ،

ولهذا نقيس التسارع بـ $m.s^{-2}$

الحركات المستقيمة

تكون هذه الحركات وفق محور واحد ، إما Ox أو Oy أو Oz .

التسارع النـاظمي لهذه الحركات معدوم $a_n = 0$ ، لأن المستقيم يُعتبر دائرة ! نصف قطرها ما لا نهـاية .

1 - الحركة المستقيمة المنتظمة

المعادلة الزمنية لهذه الحركة هي : $x = vt + x_0$ ، حيث :

x_0 : الفاصلة التي شغلها المتحرك في اللحظة $t = 0$ (الفاصلة الابتدائية) .

t : اللحظة الزمنية التي يشغل فيه المتحرك الفاصلة x .

من أجل حساب المسـافة d التي يقطعهـا المتحرك في مدة زمنية t ، نكتب $d = vt$.

مثال : اكتب المعادلة الزمنية لمتحرك يقوم بحركة مستقيمة منتظمة ، حيث يشغل الفاصلة $x_1 = 3m$ في اللحظة $t_1 = 2s$ ، ويشغل الفاصلة $x_2 = -5m$ في اللحظة $t_2 = 3s$.

الحل : المعادلة الزمنية هي $x = vt + x_0$. يجب أن نحسب قيمتي السرعة v والفاصلة الابتدائية x_0 .

المطلوب منّا رياضيا معادلة مستقيم يمر بالنقطتين $(2s\ ;\ 3m)$ و $(3s\ ;\ -5m)$

$\begin{cases} 3 = 2v + x_0 \\ -5 = 3v + x_0 \end{cases}$ بحل هذه الجملة نجد $v = -8\,m/s$ و $x_0 = 19m$ ، وبالتالي تكون المعـادلة الزمنية $x = -8t + 19$

ملاحظة : $v = -8\,m/s$ لا يعني أن السرعة سالبة ، بل يقصد أن المتحرك له سرعة $v = 8\,m/s$ ، لكنه يتحرك في الجهة السالبة للمحور الموجه .

2 - الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام

المعادلة الزمنية لهذه الحركة $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ (1) ، حيث v_0 هي السرعة في اللحظة $t = 0$ (السرعة الابتدائية)

سرعة الحركة $v = \frac{dx}{dt} = at + v_0$ (2)

لو استخرجنا عبارة الزمن من العلاقة (2) وعوّضناها في العبارة (1) نجد العبارة $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

$x - x_0$ هي المسافة المقطوعة d بين الوضعين اللذين كانت فيهما سرعة التحرك v_0 ثم أصبحت v . أما بصفة عامة ، إذا كانت سرعة المتحرّك في النقطة A هي v_A ، ثم أصبحت سرعته في النقطة B v_B ، يكون قد قطع المسافة d ، حيث :

$v_B^2 - v_A^2 = 2a(AB)$ ، المسافة $d = AB$.

يمكن حساب المسافة المقطوعة من العلاقة $d = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ ، حيث t هي المدة الزمنية المستغرقة بين A و B .

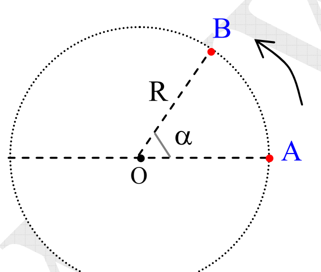
كما يمكن حساب المدّة الزمنية التي يستغرقها بين A و B من العلاقة $t = \frac{v_B - v_A}{a}$

ملاحظة : إذا اعتبرنا المتحرك يتحرك دائما في الجهة الموجبة للمحور الموجه (وهذا الذي نصادفه عادة) ، هذا يعني أن السرعة موجبة . فإذا كان :

- التسارع **موجبا** تكون الحركة متسارعة بانتظام .
- التسارع **سالبا** تكون الحركة متباطئة بانتظام .

الحركة الدائرية المنتظمة

المسار دائري ، تسارعها المماسي معدوم لأنه مشتق السرعة بالنسبة للزمن ، ونعلم أن طويلة السرعة ثابتة .



تسارع هذه الحركة هو التسارع الناظمي فقط $a_n = \frac{v^2}{R}$.

عندما يتحرك جسم على محيط دائرة ، مثلا من A إلى B ، تكون المسافة المقطوعة AB والتي هي عبارة قوس $\widehat{S} = AB = vt$ ، حيث t هي المدة الزمنية اللازمة لقطع هذا القوس .

لو قسمنا طرفي العلاقة على نصف قطر الدائرة R ، نجد $\frac{S}{R} = \frac{v}{R}t$

نعلم أن $\frac{S}{R}$ هو الزاوية α ، أما $\frac{v}{R}$ تسمى السرعة الزاوية للحركة ، حيث $\omega = \frac{v}{R}$

وحدة السرعة الزاوية هي راديان / الثانية ، أي $rd.s^{-1}$.

دور الحركة : هو الزمن اللازم لدورة تـامة ، نرمز له بـ T ، حيث $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ، أي الزاوية الموافقة لمحيط الدائرة مقسومة على الزمن اللازم لقطع هذا المحيط والذي يمثل الدور .

من أجل إيجاد الزاوية α التي يمسحها المتحرك في المدّة الزمنية t نستعمل العلاقة $\alpha = \omega t$.

II - تطبيق قوانين نيوتن على الحركات

1 - القوى الداخلية والخارجية

القوى الداخلية في جملة ميكانيكية تنعدم مثنى مثنى ، وتبقى القوى الخارجية هي المسؤولة عن حركة هذه الجملة .

الجملة (سيارة : V) القوى الخارجية هي :

$\vec{F}$ ، $\vec{F}_{r/v}$ ، $\vec{T}_{c/v}$ ، $\vec{f}$ ، $\vec{P}$

لا توجد قوى داخلية ممثلة في الشكل .

الجملة (سيارة + عربة : C) القوى الخارجية هي :

$\vec{F}$ ، $\vec{F}_{r/v}$ ، $\vec{F}_{r/c}$ ، $\vec{f}$ ، $\vec{f'}$ ، $\vec{P}$ ، $\vec{P'}$ ، القوى الداخلية : $\vec{T}_{c/v}$ ، $\vec{T}_{v/c}$



2 – دراسة مثالين

المثال – 1

نعتبر الاحتكاك على المستوي المائل (L) مكافئا لقوة ثابتة شدتها $f = 0{,}1\ N$ ولها حامل شعاع السرعة ومعاكسة له.

نترك جسما صلبا S كتلته $m = 100\ g$ ينزل بدون سرعة ابتدائية من النقطة A على خط الميل الأعظم لمستو مائل عن المستوي الأفقي بزاوية $\alpha = 30°$. نهمل مقاومة الهواء ونعتبر AB خطا مستقيما .

نعتبر الجسم S نقطة مادية .

1 – مثّل كل القوى المؤثرة على الجسم بين A و B .

2 – بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بيّن أن حركة S متسارعة بانتظام ، ثم احسب تسارعه .

3 – احسب تسارع S بين A و B بتطبيق نظرية الطاقة الحركية .

4 – نعتبر المستوي الأفقي BC (L') أملس جدّا .

أ) مثّل القوى المؤثرة على S بين B و C .

ب) احسب سرعة S عند النقطة C علما أن المسافة AB = 70 cm .

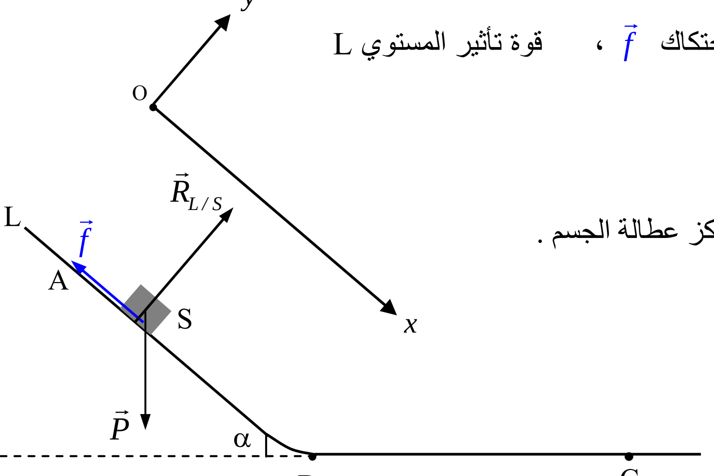
5 – باعتبار قوة الاحتكاك على BC ثابتة شدتها $f' = 0{,}15\ N$ ومعاكسة لشعاع السرعة .

نعيد ترك الجسم S في النقطة A ، كم يجب أن تكون المسافة BC لكي يتوقف الجسم في النقطة C .

نأخذ g = 10 S.I

الحل :

1 – القوى المؤثرة على S بين A و B : قوة الثقل $\vec{P}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$ ، قوة تأثير المستوي L على الجسم S $\vec{R}_{L/S}$.



2 – بتطبيق القانون الثاني لنيوتن (نظرية مركز العطالة) :

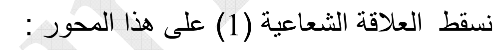
نسمي هذا القانون كذلك نظرية مركز العطالة ، لأنه لا يهتم إلا بمركز عطالة الجسم .

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R}_{L/S} + \vec{f} = m\,\vec{a} \qquad (1)$$

نختار معلما لندرس فيه حركة الجسم S ، و نعتبر مدة الحركة قصيرة حتى يتسنى لنا إعتبار هذا المعلم غاليليا .

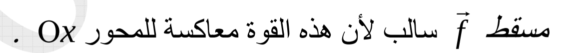
ليكن هذا المعلم هو (Ox , Oy) . نهتم فقط بالمحور Ox ، لأن الحركة تحدث فقط وفق هذا المحور .



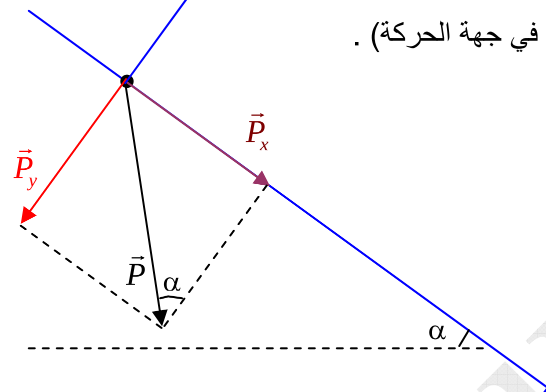
نسقط العلاقة الشعاعية (1) على هذا المحور :

لدينا مسقط قوة الثقل على المحور Ox هو $P_x = P \sin\alpha$ (المسقط موجب لأنه في جهة الحركة) .

مسقط $\vec{R}_{L/S}$ معدوم لأن هذه القوة عمودية على Ox .



مسقط $\vec{f}$ سالب لأن هذه القوة معاكسة للمحور Ox .



a : هي القيمة الجبرية للتسارع ، يمكن أن تكون موجبة ويمكن أن تكون سالبة .

وبالتالي نكتب : $P \sin\alpha - f = m\,a$

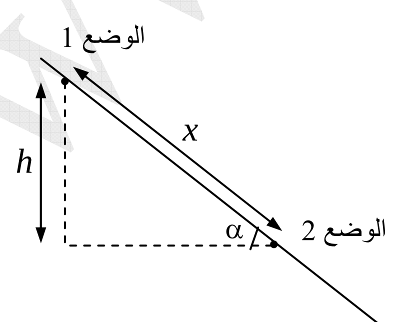
ومنه : $a = \dfrac{P \sin\alpha - f}{m}$. نلاحظ أن المقادير : P ، α ، f ، m كلها ثابتة أثناء الحركة ، إذن التسارع ثابت ، وبالتالي حركة الجسم S متغيّرة بانتظـام .

$$a = \frac{0{,}1 \times 10 \sin 30 - 0{,}1}{0{,}1} = 4\ m.s^{-2}$$

3 – بتطبيق نظرية الطاقة الحركية :

نعتبر في اللحظة t أن المسافة التي يكون قد قطعها الجسم S هي $Ox = x$ (اعتبرنا الجسم نقطة مادية ، أي ليس له أبعاد ، لكن هذه النقطة لها كتلة هي كتلة الجسم S) .

في اللحظة t تكون سرعة الجسم هي v .



نظرية الطاقة الحركية (السنة الثانية) :

$$E_{C_2} - E_{C_1} = \Delta E_c = \sum W\left(F_{ext+int}\right) \text{ ،}$$

التغيّر في الطاقة الحركية يساوي مجموع أعمال القوى الداخلية والخارجية .

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = mgh - fx$$

من المعطيات $v_1 = 0$ ، ولدينا في الشكل المقابل $h = x \sin\alpha$ ، وبالتالي :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\ x\sin\alpha - fx \qquad (2)$$

عمل $\vec{R}_{L/S}$ معدوم لأن هذه القوة عمودية على الانتقال .

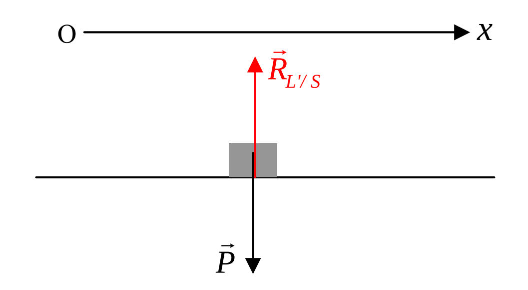
عمل $\vec{f}$ سالب لأنه مقاوم (جهة القوة عكس الانتقال) .

نشتق طرفي العلاقة (2) بالنسبة للزمن : $mva = mg\ v\sin\alpha - fv$ ، وبالتالي : $a = \dfrac{mg\sin\alpha - f}{m}$

4 -

أ) تمثيل القوى على المستوي الأفقي

ب) لكي نحسب سرعة الجسم يجب أولا أن نعرف طبيعة الحركة .



بتطبيق نظرية مركز العطالة :

$\vec{P} + \vec{R}_{L'/S} = m\vec{a}$ ، وباسقاط هذه العلاقة الشعاعية على المحور Ox :

$0 + 0 = ma$ ، ومنه $a = 0$

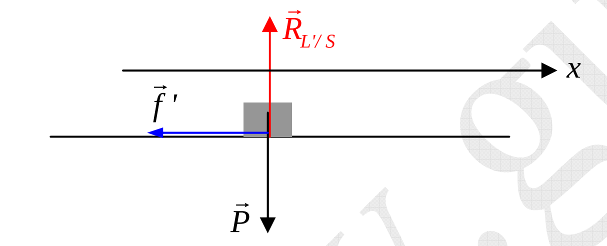
سرعة الجسم غير معدومة وتسارعه معدوم ، إذن فهو في حركة ، وحركته هذه تكون منتظمة .

ما دامت الحركة منتظمة ابتداء من النقطة B ، فإن سرعة الجسم في النقطة C هي نفسها السرعة في النقطة B .

حساب السرعة في النقطة B :

$v_B^2 - v_A^2 = 2a(AB)$ ، ولدينا $v_A = 0$ ، وبالتالي : $v_B^2 = 2\times 4\times 0{,}70 = 5{,}6$ ، ومنه $v_B = 2{,}36\ m/s = v_C$

5 - بتطبيق نظرية مركز العطالة على الجسم S



$\vec{P} + \vec{R}_{L'/S} + \vec{f}\,' = m\ \vec{a}\,'$ ، وباسقاط هذه العلاقة على المحور Ox

$-f\,' = m\ a'$ ، وبالتالي $a' = -\dfrac{f\,'}{m}$

التسارع ثابت إذن الحركة متغيّرة بانتظام .

ملاحظة : نعلم أن الحركة تكون متسارعة بانتظام إذا كان $\vec{v}.\vec{a} > 0$ أو $v.\ a_t > 0$

متباطئة بانتظام إذا كان $\vec{v}.\vec{a} < 0$ أو $v.\ a_t < 0$

نحن لدينا في هذا المثال طويلة السرعة موجبة لأن الجسم S يتحرك في الجهة الموجبة للمحور ، أما طويلة التسارع (والذي يمثل التسارع المماسي لأن الحركة مستقيمة ، تسارعها الناظمي معدوم) ، وجدناها سالبة ، لأن f موجبة و m موجبة .

وبالتالي يكون لدينا $v.\ a_t < 0$ ، إذن الحركة متباطئة بانتظام .

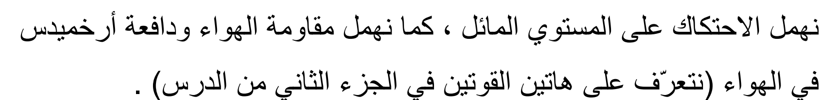
لكي نحسب المسافة BC نطبق العلاقة $v_C^2 - v_B^2 = 2a'(BC) \qquad (3)$

ولدينا $v_B = 2{,}36$ m/s ، $v_C = 0$ (توقف الجسم)

$a' = -\dfrac{f\,'}{m} = -\dfrac{0{,}15}{0{,}1} = -1{,}5\ m.s^{-2}$ ، وبالتعويض في العلاقة (3) : $BC = \dfrac{-v_B^2}{2a'} = \dfrac{-5{,}6}{-2\times 1{,}5} = 1{,}86\ m$

المثال 2

تتكوّن جملة ميكانيكية من جسمين صلبين S_1 و S_2 موصولين بخيط خفيف جدا يمر على بكرة نعتبر كتلتها مهملة . يمكن للجسم S_1 أن ينسحب على مستو مائل عن المستوي الأفقي بزاوية $\alpha = 30°$.



نهمل الاحتكاك على المستوي المائل ، كما نهمل مقاومة الهواء ودافعة أرخميدس في الهواء (نتعرّف على هاتين القوتين في الجزء الثاني من الدرس) .

كتلة الجسم S_1 : $M_1 = 300$ g وكتلة الجسم S_2 : $M_2 = 200$ g .

نأخذ $g = 10$ u .i .

1 – عيّن جهة الحركة .

2 – احسب تسارع S_1 و S_2 .



الحل :

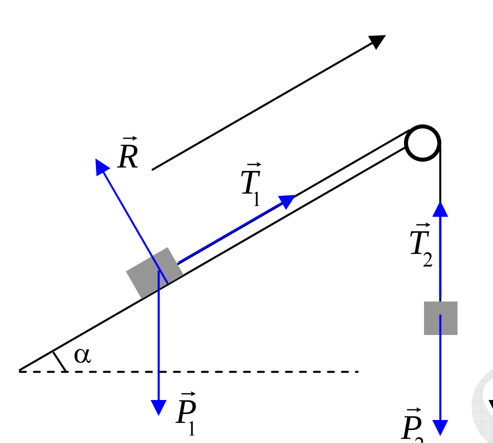
1 – لتعيين جهة الحركة نقارن بين $P_2 = M_2\, g$ و $P_1 \sin\alpha = M_1 g \sin\alpha$

$P_2 = 0{,}2 \times 10 = 2$ N ، $P_1 \sin\alpha = 0{,}3 \times 10 \times 0{,}5 = 1{,}5$ N .

بما أن $P_2 > P_1 \sin\alpha$ ، إذن جهة الحركة تكون نحو اليمين ، أي في جهة S_2 .

2 - تسارع الجسم S_1 هو نفسه تسارع الجسم S_2 لأن الجملة مترابطة .

نمثل القوى المؤثرة على كل جسم .



بتطبيق نظرية مركز العطالة على كل جسم :

الجسم S_1 :

$\vec{T_1} + \vec{P_1} + \vec{R} = M_1 \vec{a_1}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور الموازي للمستوي المائل :

$$T_1 - P_1 \sin\alpha = M_1 a_1 \qquad (1)$$

الجسم S_2 :

$\vec{T_2} + \vec{P_2} = M_2 \vec{a_2}$ ، وباسقاط هذه العلاقة على المحور الشاقولي :

$$P_2 - T_2 = M_2 a_2 \qquad (2)$$

عندما تكون كتلة البكرة مهملة يكون $T_1 = T_2$ ، وبجمع المعادلتين (1) و (2) طرفا لطرف ، حيث أن $a_1 = a_2 = a$

نجد تسارع كل من الجسم S_1 و S_2 : $a = \dfrac{P_2 - P_1 \sin\alpha}{M_1 + M_2} = \dfrac{2 - 1{,}5}{0{,}5} = 1\ m.s^{-2}$

حذار : $\vec{T_1} \neq \vec{T_2}$ و $\vec{a_1} \neq \vec{a_2}$ ، لكن $T_1 = T_2$ و $a_1 = a_2$

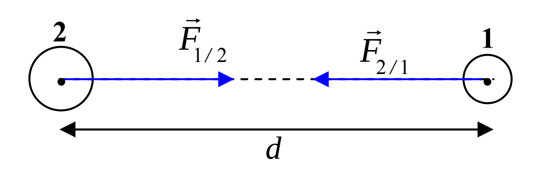
III - حركة قمر صناعي حول الأرض (تطبيق للحركة الدائرية المنتظمة)

ننسب حركة الأقمار الصناعية إلى المرجع الأرضي مركزي .

1 – قانون الجذب العام :

يتجاذب جسمان كتلتاهما M_1 و M_2 البعد بينهما d بقوة $F_{1/2} = F_{2/1} = G\dfrac{M_1 M_2}{d^2}$

حيث G هو ثابت الجذب العام ، أو نسميه الثابت الكوني وقيمته $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N . m^2 . kg^{-2}$



2 – القوى التي يخضع لها القمر الصناعي

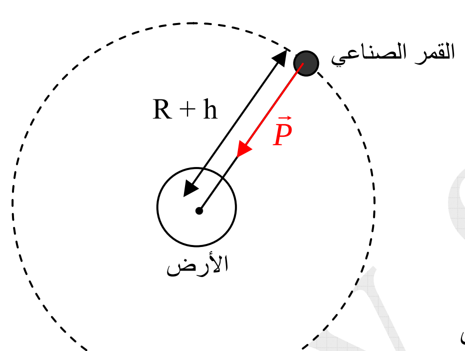
يُحمل القمر الصناعي بواسطة مركبة فضائية إلى ارتفاع محدّد عن سطح الأرض ، ثم تُعطى له سرعة تمكنه من البقاء على مداره .

حينذاك يكون خاضعا لقوتين متعاكستين مباشرة ، هما قوة جذبه نحو مركز الأرض (ثقله) وقوّة الطرد المركزي الناتجة عن سرعته الكبيرة .

(لو فرضنا جدلا أن القمر الصناعي توقف عن الحركة ، سيسقط على سطح الأرض ، ولو أعطيت له سرعة أكبر من المحدّدة له يغادر مداره نحو كوكب آخر).

قوة الطرد المركزي هي قوة وهمية ، أي أنها تظهر فقط أثناء الدوران .

(تشعر وأنت راكب في السيارة بقوة تحاول طردك نحو الخارج عندما تعبر السيارة منعطفا)



3 - سرعة القمر الصناعي

حركة القمر الصناعي دائرية منتظمة ، أي تسارعه ناظمي ، فالقوة التي تجذبه نحو الأرض

تكون مركزية ، أي $F = m a_n$ ، وبالتالي $G\dfrac{mM_T}{(R+h)^2} = m\dfrac{v^2}{R+h}$ (1)

حيث m : كتلة القمر الصناعي ، M_T : كتلة الأرض ، R : نصف قطر الأرض ، h : الارتفاع بين القمر الصناعي وسطح الأرض .

من العلاقة (1) نستنتج

$$v = \sqrt{G\frac{M_T}{R+h}}$$

4 - دور القمر الصناعي : هو الزمن اللازم لكي يقوم القمر الصناعي بدور كاملة .

لدينا : $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\dfrac{v}{R+h}} = \dfrac{2\pi(R+h)}{v}$ ، وباستعمال عبارة السرعة نجد :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM_T}}$$

5 - القمر الصناعي المستقر أرضيا

تُستعمل مثل هذه الأقمار في البث التلفزيوني ، وهي الأقمار التي تدور في جهة دوران الأرض أي شمالا ، ودورها يساوي دور الأرض . في هذه الحالة يبقى دائما القمر فوق نفس النقطة من خط الإستواء أثناء دورانه .

مثال : على أي ارتفاع يجب وضع قمر صناعي مستقر أرضيا .

نصف قطر الأرض المتوسط R = 6400 km . كتلة الأرض $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg

الحل : لدينا $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(R+h)^3}{GM_T}}$ ، حيث T = 24 h = 24 × 3600 = 86400 s .

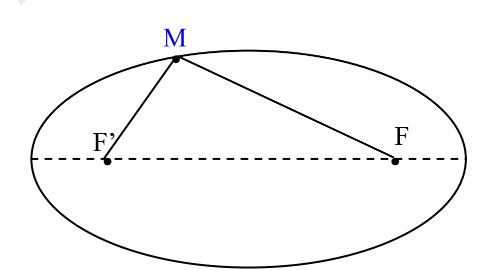
بتربيع طرفي العلاقة : $T^2 = 4\pi^2 \dfrac{(R+h)^3}{GM_T}$ ، ومنه $(R+h)^3 = \dfrac{T^2 GM_T}{4\pi^2}$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2GM_T}{4\pi^2}} - R = \sqrt[3]{\frac{(86400)^2 \times 6{,}67\times10^{-11}\times6\times10^{24}}{40}} - 64\times10^5 \approx 36000\ km$$

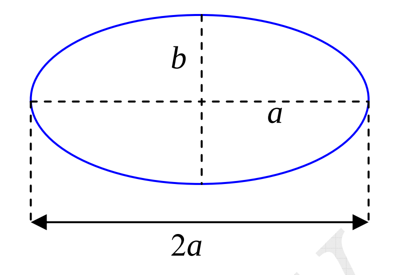
6 - قوانين كبلر

1 - القطع الناقص : هو شكل هندسي تحقق نقاطه M العلاقة MF + MF’ = 2 a

F ، F’ هما محرقا القطع الناقص و a هو نصف محوره الأكبر ، b : هو نصف المحور الأصغر



القطع الناقص ومحرقاه F و F’



المحوران الأكبر والأصغر للقطع الناقص

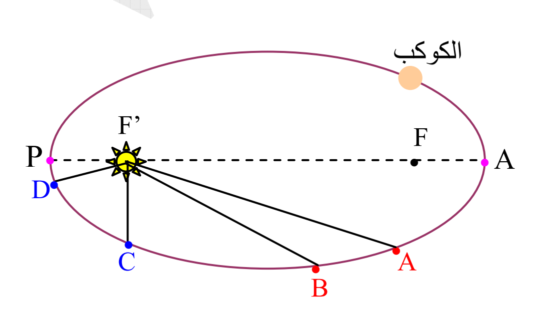
2 - القانون الأول

تدور الكواكب حول الشمس في مدارات إهليلجية ، بحيث يكون أحد محرقيها هو مركز الشمس ، وذلك في المرجع الشمسي مركزي ونفس الشيء بالنسبة للأقمار الصناعية حول الأرض بحيث يكون مركز الأرض هو أحد محرقي مساراتها الإهليلجية ، وذلك في المرجع الأرضي المركزي .

ملاحظة : نعتبر أحيانا هذه المسارات دائرية .

3 - القانون الثاني (قانون المساحات)

المساحات التي يمسحها المستقيم الواصل بين مركز الكوكب ومركز الشمس تكون متساوية في مُدد زمنية متساوية . أي أن سرعة الكوكب تزداد عندما يقترب من الشمس وتتناقص عندما يبتعد عنه .



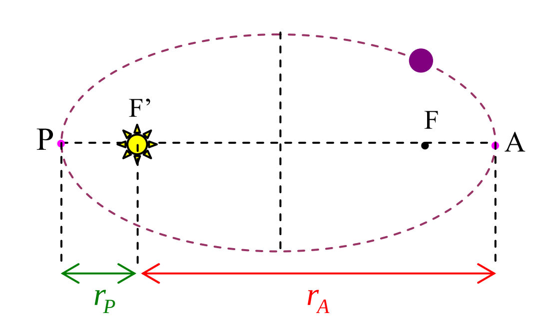
المساحتان F’AB و F’CD متساويتان إذا كانت المدة التي يستغرقها الكوكب من A إلى B تساوي المدة التي يستغرقها من C إلىD .
سرعة الكوكب تكون عظمى بجوار النقطة P (تسمى هذه النقطة نقطة الرأس الأقرب) ، وتكون سرعته صغرى بجوار النقطة A (تسمى هذه النقطة نقطة الرأس الأبعد وتسمى كذلك الأوْج) .

4 - القانون الثالث

في مرجع شمسي مركزي تكون النسبة بين مربع دور الكوكب ومكعّب نصف المحور الأكبر للمسار دائما ثابتة ، أي أن بالنسبة لكوكبين سيارين مختلفين ، دور الأول T_1 ودور الثاني T_2 ، يكون دائما :

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = k$$

ونفس الشيء بالنسبة للأقمار الصناعية حول الأرض في المعلم الأرضي مركزي .



في هذه العلاقة البعد a هو $a = \frac{r_P + r_A}{2}$ (انظر للشكل المقابل)

إذا اعتبرنا المسار دائريا يكون : $\frac{T^2}{(R+h)^3} = k$ ،

حيث h هو بعد القمر الصناعي عن سطح الأرض و R هو نصف قطر الأرض .

ما يجب أن أعرفه حتى أقول : إني استوعبت هذا الدرس

1 – يجب أن أعرف أن مجال الجاذبية الأرضية ثابت على ارتفاع من رتبة الكيلوميترات عن سطح الأرض ، وأن قوّة جذب الأرض للأجسام ما هي إلا قوة ثقل هذه الأجسام .

2 – يجب أن أعرف أن قوة الاحتكاك لجسم مع مائع تتناسب مع سرعته مرفوعة للأس n ، أي $f = k\ v^n$ ، وأننا لا ندرس إلا حالتين هما من أجل $n = 2$, $n = 1$.

3 – يجب أن أعرف أن دافعة أرخميدس (Archimède) في الموائع (الغازات والسوائل) هي ثقل المائع الذي يزيحه الجسم .

4 – يجب أن أعرف أن السرعة الحدّية لجسم يسقط في مائع هي السرعة التي يكتسبها عندما تصبح القوى المعرقلة له مساوية لقوة ثقله

5 – يجب أن أعرف حل المعادلتين التفاضليتين في الحالتين : $f = k\ v$ و $f = k'\ v^2$ ، حيث أن في الحالة الأولى يكون الحل مماثلا للحلول التي مرّت معنا في الكهرباء ، أما في الحالة الثانية نمثّل مخطّط السرعة باتباع طريقة أولر $(Euler)$.

6 – يجب أن أعرف أن السقوط الحر هو حركة متغيرة بانتظام تسارعها $\vec{g}$.

7 – يجب أن أعرف مبدأ انحفاظ الطاقة وكيفية تطبيقه لدراسة جملة ميكانيكية .

8 – يجب أن أعرف أن حركة الأجسام في مجال الجاذبية الأرضية ما هي إلا تطبيقات لقوانين نيوتن .

ملخص الدرس

1 – السقوط الشاقولي لجسم

في الحالة العامة يخضع الجسم إلى القوى التالية :

قوة ثقله $\vec{P}$ ، قوة الاحتكاك مع المائع $f = k\ v^n$ ، دافعة أرخميدس $\Pi = \rho_f\ V_s\ g$

حيث : ρ_f : الكتلة الحجمية للمائع (Le fluide)

V_s : حجم الجسم المتحرّك

2 - المعادلتان التفاضليتان اللتان تخضع لهما السرعة

- حالة $f = k\ v$: $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right)$. حل هذه المعادلة : $v = \frac{mg}{k}\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

- حالة $f = k'\ v^2$: $\frac{dv}{dt} + \frac{k'}{m} v^2 = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right)$

في كلتي الحالتين : إذا كانت الكتلة الحجمية للمائع (ρ_f) صغيرة جدّا أمام الكتلة الحجمية للجسم (ρ_s) يمكن إهمال النسبة $\frac{\rho_f}{\rho_s}$ أمام 1

وبالتالي تكون دافعة أرخميدس مهملة . تصبح المعادلتان في هذه الحالة :

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g \quad ، \quad \frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v^2=g$$

3 - السرعة الحدية

- **حالة** $f=k\,v$: $v_l=\frac{mg}{k}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_s}\right)$
- **حالة** $f=k'\,v^2$: $v_l=\sqrt{\frac{mg}{k'}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_s}\right)}$

4 - الزمن المميّز للسقوط

من أجل $f=k\,v$: $\tau=\frac{m}{k}$ ، من أجل $f=k'\,v^2$: $\tau=\sqrt{\frac{m}{k'a_0}}$ ، حيث a_0 هو التسارع عند $t=0$

نتنبأ بواسطة هذا الزمن عن بداية الانتقال إلى النظام الدائم .

5 - السقوط الحر الشاقولي

التسارع : $\vec{a}=\vec{g}$

السرعة : $v=g\,t+v_0$

الفاصلة : $z=\frac{1}{2}g\,t^2+v_0\,t+z_0$

العلاقة بين المسافة المقطوعة (h) والمدة الزمنية (t) اللازمة لقطعها : $h=\frac{1}{2}g\,t^2+v_0\,t$

العلاقة بين السرعة والمسافة المقطوعة من النقطة A إلى النقطة B : $v_B^2-v_A^2=2g\,h$

6 – السقوط الحر في المستوي (حركة قذيفة في الفراغ)

إذا قُذف جسم في المستوي الشاقولي $(O\,x\,z)$ أو $(O\,y\,z)$ من مبدأ الإحداثيات بسرعة ابتدائية يصنع شعاعها مع المحور الأفقي زاوية حادّة α . يكون لدينا : $\vec{a}=\vec{g}$

$$v_x=v_0\cos\alpha \quad ، \quad v_{0,z}=v_0\sin\alpha$$

$x=v_0\cos\alpha\;t$ الحركة منتظمة على المحور الأفقي

$z=\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\alpha\;t$ (g : قيمة جبرية) الحركة متغيرة بانتظام على المحور الشاقولي .

معادلة المسار : $z=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+x\,tg\alpha$ ، **فاصلة المدى** : $x=d=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$

ترتيب الذروة : $y=h=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$

شعاع السرعة عند الذروة يكون أفقيا ، لأن السرعة على Oz تنعدم .

الدرس

1 – السقوط الشاقولي لجسم

يخضع الجسم أثناء سقوطه في مــائع (سائل أو غـاز) إلى القوتين $\vec{f}$ و $\vec{\Pi}$ (الشكل – 1) ، وهما قوتان معاكستان لقوة ثقل الجسم .

دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$: لما نغمر جسما في إناء يحتوي على الماء أو أي سائل آخر ، فإن مستوى الماء في الإناء يصعد . الحجم الزائد (المُزاح من طرف الجسم) هو نفسه حجم الجسم . لو أخذنا هذا الحجم من السائل المُزاح ووزناه في ميزان نجد كتلته m ، ولو حسبنا ثقله نجد $P = m\,g$. إن هذا الثقل هو نفسه شدّة القوة التي نسميها دافعة أرخميدس .

نفس الشيء بالنسبة لجسم مغمور في غاز ، فإن دافعة أرخميدس هي ثقل الغاز الذي أزاحه الجسم .

خصائصها : **الحامل** : هو الشاقول ، يعني نفس حامل ثقل الجسم .

الجهة : نحو الأعلى .

نقطة التأثير : مركز عطالة الجسم ، أي نفس نقطة تأثير ثقل الجسم .

الشدّة : $\Pi = m\,g$ ، ولدينا كتلة السائل المزاح هي $m = \rho_f\ V_S$ ، وبالتالي $\Pi = \rho_f V_S\ g$

حيث : ρ_f هي الكتلة الحجمية للسائل ، و V_S هو حجم الجسم .

$\vec{f}$

$\vec{\Pi}$

الشكل - 1

$\vec{P}$

قوّة الإحتكاك $\vec{f}$: تتناسب مع سرعة الجسم ، كلما تزداد السرعة تزداد مقاومة السائل للجسم (أخرج يدك من نافذة السيارة عندما تكون سرعة السيارة صغيرة ، ثم عندما تكون سرعة السيارة كبيرة وقارن في كل حالة القوة التي تقاوم حركة يدك) .

- في حالة سرعة الجسم صغيرة : نقول أن الجسم ينساب في السائل ، وتكون طويلة قوة الاحتكاك من الشكل : $f = k\ v$

- في حالة سرعة الجسم كبيرة نسبيا : تحدث اضطرابات وراء الجسم أثناء حركته في السائل ، وتكون طويلة قوة الاحتكاك من الشكل : $f = k'\ v^2$

نسمي كلا من k و k' ثابت الاحتكاك .

2 - تطبيق القانون الثاني لنيوتن

$\vec{P} + \vec{f} + \vec{\Pi} = m\,\vec{a}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور الشاقولي Oz (الشكل – 2) :

$$P - f - \Pi = m\,a$$

- **حالة $f = k\ v$**

$mg - kv - \rho_f V_S\ g = m\dfrac{dv}{dt}$ ، وبتقسيم طرفي المعادلة التفاضلية على m ، نكتب :

$\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{k}{m}\ v = g\left(1 - \rho_f\ \dfrac{V_S}{m}\right)$ ، ولدينا $\dfrac{V_S}{m} = \dfrac{1}{\rho_S}$ ، حيث ρ_S : الكتلة الحجمية للجسم .

وتصبح المعادلة التفاضلية :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}\ v = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_S}\right) \qquad (1)$$

حل هذه المعادلة من الشكل $v = Ae^{\alpha\, t} + B \qquad (2)$

O

$\vec{f}$

$\vec{\Pi}$

$\vec{P}$

z

الشكل – 2

نعوّض في (1) : $A\alpha e^{\alpha t}+\frac{k}{m}\left(Ae^{\alpha t}+B\right)=g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$

$A\alpha e^{\alpha t}+\frac{k}{m}Ae^{\alpha t}+\frac{kB}{m}=g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$ ، أو $Ae^{\alpha t}\left(\alpha+\frac{k}{m}\right)+\frac{kB}{m}=g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$

لكي تتحقق هذه المعادلة يجب أن يكون :

$\alpha+\frac{k}{m}=0\Rightarrow\alpha=-\frac{k}{m}$ ، $\frac{kB}{m}=g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$ ، ومنه $B=\frac{mg}{k}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$

أما لتحديد عبارة A نستعمل الشروط الابتدائية ، فمثلا إذا لم تكن للجسم سرعة ابتدائية ، أي أنه عند اللحظة $t=0$ تكون $v=0$

يكون لدينا باستعمال المعادلة (2) $0=Ae^0+\frac{mg}{k}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$ ، ومنه $A=-\frac{mg}{k}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$.

المعادلة الزمنية للسرعة هي إذن :

$$\boldsymbol{v=\frac{mg}{k}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)}$$

السرعة الحدّية :

عندما يسقط الجسم تتزايد سرعته ، حيث في نفس الوقت تتزايد قوة الاحتكاك ، لأن هذه الأخيرة تتناسب مع السرعة .

ونعلم أن أثناء السقوط لا يتغير ثقل الجسم وكذلك دافعة أرخميدس لا تتغير (نعتبر دائما عند $t=0$ دافعة أرخميدس موجودة ، أي نعتبر أن الجسم يكون مغمورا تماما في المائع في اللحظة $t=0$) . وعندما يصبح مجموع قوتي الاحتكاك ودافعة أرخميدس مساويا لقوّة الثقل يصبح المجموع الشعاعي للقوى المؤثرة على الجسم معدوما ، وبالتالي يصبح التسارع معدوما

لأن $\sum\vec{F}=m\,\vec{a}$ ، $m\neq 0$ ، ومنه $\frac{dv}{dt}=0$ ، لأن $a=\frac{dv}{dt}$

نعوّض $\frac{dv}{dt}=0$ في المعادلة التفاضلية (1) ونجد السرعة ، والتي نسميها السرعة الحدّية :

$$\boldsymbol{v_l=\frac{mg}{k}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_s}\right)}$$

- **حالة $f=k'\,v^2$**

$mg-k'v^2-\rho_f V_S\,g=m\frac{dv}{dt}$ ، وبتقسيم طرفي المعادلة التفاضلية على m ، نكتب :

$\frac{dv}{dt}+\frac{k'}{m}v^2=g\left(1-\rho_f\frac{V_S}{m}\right)$ ، ولدينا $\frac{V_S}{m}=\frac{1}{\rho_S}$ ، حيث ρ_S : الكتلة الحجمية للجسم .

وتصبح المعادلة التفاضلية : $\frac{dv}{dt}+\frac{k'}{m}v^2=g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$

بوضع $\frac{dv}{dt}=0$ ، نجد عبارة السرعة الحدية $\boldsymbol{v_l=\sqrt{\frac{mg}{k'}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_s}\right)}}$

هذه المعادلة التفاضلية من الشكل : $\frac{dv}{dt}+B\,v^2=A$ ، إن حل هذه المعادلة التفاضلية بالطريقة السابقة خارج برنامج الرياضيات .

لهذا نلجأ للطريقة التقريبية المسماة طريقة أولر .

ملاحظة : A و B في هذه المعادلة التفاضلية لا علاقة لهما بـ A و B في حل المعادلة التفاضلية السابقة ، فهي مجرد رموز فقط .

تسمح طريقة أولر بتمثيل تقريبي للسرعة بدلالة الزمن . فمن أجل حساب السرعات في كل لحظة يجب أن نماثل بين $\frac{dv}{dt}$ و $\frac{\Delta V}{\Delta t}$

أي معنى هذا يجب أن نأخذ فرقا صغيرا بين كل لحظة ولحظة تعقبها ، أو بعبارة أخرى يجب أن يكون Δt صغيرا .

لدينا : $\frac{dv(t)}{dt}=A-B\,v^2(t)$. وبالتالي نكتب $\frac{\Delta v}{\Delta t}=A-B\,v^2(t)$ أو $\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=A-Bv^2(t)$

وبالتالي : $v(t+\Delta t)-v(t)=\left[A-Bv^2(t)\right]\Delta t$

نسمي Δt **خطوة التغيّر الزمني** .

إذا كانت مرتبة السرعة $v(t)$ هي v_n ، تكون مرتبة السرعة $v(t+\Delta t)$ هي v_{n+1} ، وعلى هذا الأساس نكتب :

$$\boldsymbol{v_{n+1}=v_n+\left[A-B\,v_n^2\right]\Delta t}$$

عندما نحسب قيم السرعة في كل لحظة نتبع ما يلي :

عند $t_0=0$ لدينا $v=v_0$

عند $t_1=t_0+\Delta t$ ، أي من أجل $n=0$ لدينا $v_1=v_0+\left[A-B\,v_0^2\right]\Delta t$

عند $t_2=t_1+\Delta t$ ، أي من أجل $n=1$ لدينا $v_2=v_1+\left[A-B\,v_1^2\right]\Delta t$

عند $t_3=t_2+\Delta t$ ، أي من أجل $n=2$ لدينا $v_3=v_2+\left[A-B\,v_2^2\right]\Delta t$ ...

وهكذا نتحصّل على جدول يحتوي على قيم السرعة واللحظات الموافقة لها ، وبالتالي يمكن تمثيل $v=f(t)$

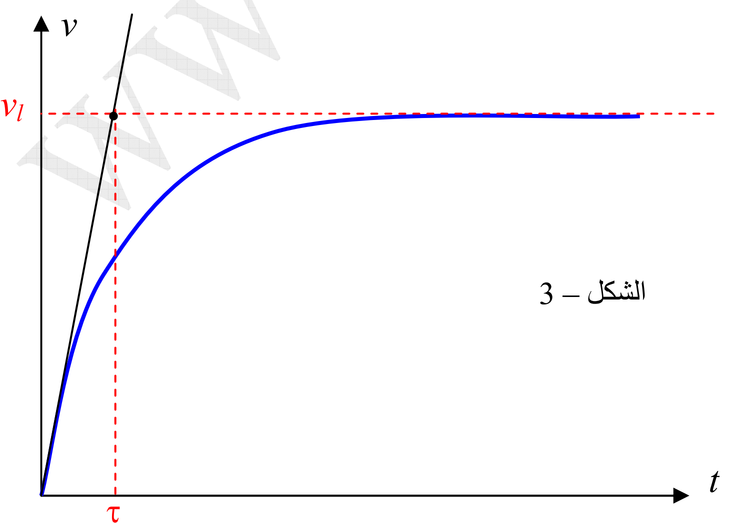
وإذا أردنا حساب التسارع في اللحظة t_n نكتب $\boldsymbol{a_n=\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t_n}=A-B\,v_n^2}$

ملاحظة : يمكن أن نستعمل طريقة أولر في حالة المعادلة التفاضلية من أجل $f=k\,v$ بإتباع نفس الخطوات .

3 - تمثيل $v=f(t)$ (الشكل – 3)

سواء من أجل $f=kv$ أو $f=k'v^2$

نجد البيان الممثّل في الشكل - 3 .



الشكل – 3

4 - الثابت المميز للحركة (τ) (ثابت الزمن)

حالة $f = kv$: لدينا المعادلة التفاضلية $\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v = g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$ ، ونعلم أنه عند $t=0$ تكون سرعة المتحرك معدومة ،

وبالتالي $\frac{dv}{dt} = g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$ (3)

ونعلم كذلك أن $\frac{dv}{dt}$ هو تسارع المتحرك ، نرمز له بـ a_0 عند $t=0$.

ملاحظة : لا تنس أن التسارع ليس ثابتا لأن الحركة ليست متغيرة بانتظام ، لأن مجموع القوى ليس ثابتا لأن f تتغير أثناء الحركة في النظام الانتقـالي .

نكتب العلاقة (3) على الشكل $a_0 = g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$

لاحظ في الشكل – 3 أن ميل المماس عند $t=0$ هو التسارع a_0 ، لأنه هو مشتق السرعة بالنسبة للزمن عند $t=0$ ، وبالتالي

$a_0 = \frac{v_l}{\tau}$ (ميل المماس هو المقابل على المجاور) ، ومنه : $\boxed{\tau = \frac{v_l}{a_0}}$

لدينا $v_l = \frac{mg}{k}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_s}\right)$ ، وبالتالي $\tau = \frac{\frac{mg}{k}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_s}\right)}{g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)} = \frac{m}{k}$ ، ومنه $\boxed{\tau = \frac{m}{k}}$

حــالة $f = k'v^2$: لدينا المعادلة التفاضلية $\frac{dv}{dt}+\frac{k'}{m}v^2 = g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$ ، ونعلم أنه عند $t=0$ تكون سرعة المتحرك معدومة

وبالتالي $\frac{dv}{dt} = g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right) = a_0$ ، ولدينا $v_l = \sqrt{\frac{mg}{k'}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_s}\right)}$ ، ونعلم أن $\tau = \frac{v_l}{a_0}$ سواء كانت $f = kv$ أو $f = k'v^2$.

وبالتالي $\sqrt{\frac{m}{k'a_0}} = \sqrt{\frac{m\times a_0}{k'\times a_0^2}} = \frac{\sqrt{\frac{m}{k'}a_0}}{a_0} = \tau$ ، ومنه $\boxed{\tau = \sqrt{\frac{m}{k'a_0}}}$

الثابت المميز للحركة هو رتبة مقدار زمن النظـام الانتقالي

الكلام الموجود داخل الإطار معناه أننا نستعمل τ كوحدة لقياس مدة النظام الانتقالي ، مثلا : 5τ ، 3τ ، ....

التحليل البعدي لثابت الاحتكاك :

بالنسبة لـ $k = \frac{m}{\tau}$: $[k] = \frac{kg}{s} = kg.s^{-1}$

بالنسبة لـ $k' = \frac{m}{\tau^2 \times a_0}$: $[k'] = \frac{kg}{s^2 \times \frac{m}{s^2}} = kg.m^{-1}$

ثابت الاحتكاك k : يتعلق بلزوجة المائع وشكل الجسم ، فبالنسبة لكرة نصف قطرها r : $k = 6\pi\eta r$ ، حيث η هو معامل اللزوجة .

ثابت الاحتكاك k' : لا يتعلق بلزوجة المـائع بل يتعلق فقط بشكل الجسم ، فبالنسبة لكرة نصف قطرها r : $k' = 0,22\,\pi \rho_f\, r^2$ ، حيث ρ_f هي الكتلة الحجمية للمائع .

ملاحظة : أنت لست مطالبا بحفظ هاتين العلاقتين ، تعطى لك في التمارين من أجل مقارنة ثابت الاحتكاك التجريبي مع النظري ، أو اختيار مائع من بين عدّة موائع مقترحة في التمرين .

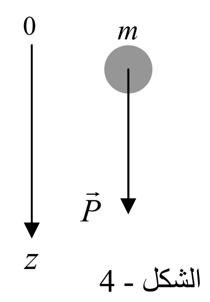
5 - السقوط الحر

نقول عن جسم أنه في سقوط حرّ إذا كان أثناء حركته لا يخضع إلا لقوّة ثقله $\vec{P}$ (الشكل – 4) .

نطبق القانون الثاني لنيوتن على جسم في سقوط حرّ .

$\vec{P} = m\,\vec{a}$ ، ولدينا $\vec{P} = m\,\vec{g}$ ، ومنه : $m\,\vec{a} = m\,\vec{g}$ ، وبالتالي تسارع السقوط الحر هو :

$$\vec{a} = \vec{g}$$



الشكل - 4

المعادلة التفاضلية لهذه الحركة هي $\frac{dv}{dt} = g$

5 – 1 - معادلات السقوط الحر الشاقولي :

التسارع : $a = g$ ، حيث g قيمة جبرية (أي موجبة أو سالبة) .

السرعة : بمكاملة التسارع بالنسبة للزمن (يعني وجود الدالة الأصلية) نجد السرعة في اللحظة t : $v = g\,t + b$

من أجل تحديد الثابت b نستعمل الشروط الابتدائية ، أي عند $t = 0$ تكون $v = v_0$ ، (v_0 هي السرعة الابتدائية ، أي السرعة في اللحظة $t = 0$ ، وليس ضروريا أن تكون هي السرعة التي بدأ بها الجسم حركته)

$$v = gt + v_0$$

الفاصلة : بمكاملة السرعة بالنسبة للزمن : $z = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + C$ ، ومن أجل تحديد الثابت C نستعمل الشروط الابتدائية

حيث عند $t = 0$ يكون $z = z_0$ (z_0 هي الفاصلة الابتدائية ، وليس بالضرورة أن تكون هي الفاصلة التي انطلق منها المتحرك) .

$$z = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0$$

5 – 2 - قوانين خاصة بالسقوط الحر

المسافة المقطوعة (الارتفاع) : $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$ حيث t هي المدة الزمنية لقطع المسافة h .

سرعة الجسم في لحظة ما : إذا كانت سرعة الجسم في لحظة ما هي v_A وكانت في لحظة بعدها v_B ، فإن :

$v_B - v_A = g\,t$ حيث t هي المدة المستغرقة بين A و B

العلاقة بين السرعة والمسافة : إذا كانت سرعة الجسم في لحظة ما هي v_A وكانت في لحظة بعدها v_B ، فإن

$v_B^2 - v_A^2 = 2g\,h$ حيث h هي المسافة AB

6 - حركة قذيفة في مجال الجاذبية الأرضية

القذيفة هي جسم يُقذف من نقطة بسرعة ابتدائية يصنع شعاعها مع المستوي الأفقي التي قذفت منه زاوية $\alpha \in \left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$

ملاحظة : إذا كانت $\alpha = \frac{\pi}{2}$ يكون القذف شاقوليا (سبق لنا دراسة هذه الحالة) .

ندرس حركة القذيفة في المستوي $(O\,x\,z)$ أو $(O\,y\,z)$ ، أي في مستو شاقولي .

ندرس مثالا مختصرا ، ونتطرق لكل الحالات الأخرى في تمارين الكتاب المدرسي .

نقذف في اللحظة $t = 0$ جسما نعتبره نقطة مادية من مبدأ الإحداثيات بسرعة $\vec{v}_0$ يصنع شعاعها مع المحور Ox الزاوية α .

6 – 1 - دراسة حركة القذيفة

نطبّق على حركة النقطة المـادية القانون الثاني لنيوتن ، باعتبار أنها لا تخضع إلا لقوة ثقلها (الشكل – 5)

أي حركتها عبارة عن سقوط حر .

$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$

$\vec{P} = m\,\vec{a}$ ، وبتعويض $\vec{P}$ بـ $m\,\vec{g}$ واختصار m من الطرفين :

نجد $\vec{a} = \vec{g}$

مركبتا شعاع التسارع في المعلم هما $\vec{a}\,(0\ ,\ -g)$

مركبتا شعاع السرعة الابتدائية هما $\vec{v}_0\,(v_0 \cos\alpha\ ,\ v_0 \sin\alpha)$

مركبتا شعاع الانتقال هما $\overrightarrow{OG}\,(x\ ,\ z)$.

الشكل – 5

بما أن التسارع على المحور Ox معدوم ، إذن الحركة على هذا المحور منتظمة ، وسرعتها $v_x = v_0 \cos\alpha$ ، وبالتالي :

$x = v_0 \cos\alpha\ t \quad (4)$

بما أن التسارع على المحور Oz ثابت (g –) ، إذن الحركة على هذا المحور متغيّرة بانتظام ، وسرعتها الابتدائية $v_{0,z} = v_0 \sin\alpha$

وبالتالي : $z = -\frac{1}{2} g\,t^2 + v_0 \sin\alpha\ t \quad (5)$

وباشتقاق عبارة z بالنسبة للزمن نجد السرعة على المحور z : $v_z = -g\,t + v_0 \sin\alpha$

6 – 2 - معادلة المسار

من العلاقة (4) نستخرج $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ ، ثم نعوّض عبارة الزمن في العلاقة (5) ونجد معادلة المسار :

$z = -\frac{1}{2} g\,\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + v_0 \sin\alpha\,\frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ ، ومنه : $z = -\frac{g}{2\,v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x\,tg\alpha$

معادلة المسار من الشكل $z = a\,x^2 + b\,x + c$ في الحالة العامة (معناه إذا كان $z_0 = c$) ، فهي معادلة قطع مكافئ .

6 – 3 - النقط الخاصة في المسار

الذروة (S) : هي أعلى نقطة تصلها القذيفة (الشكل – 6) .

من خصائص هذه النقطة أن السرعة على المحور Oz تنعدم ، أي

$$-g\ t + v_0 \sin\alpha = 0 \qquad (6)$$

ملاحظة : السرعة على المحور Ox لا تنعدم في S لأن السرعة على هذا المحور ثابتة (الحركة منتظمة على Ox) .

نستخرج الزمن من العلاقة (6) ونعوّضه في العلاقة (5)

نجد ترتيب الذروة : $z_S = \dfrac{v_0^2\ \sin^2\alpha}{2g}$

z

z_S

S

$\vec{v}_0$

المسار

O

x_S

P

x

الشكل – 6

المدى : هي أكبر مسافة تقطعها القذيفة على المحور الأفقي Ox ، أي هي المسافة OP .

لإيجاد المسافة OP (x_P) نضع $z = 0$ في معادلة المسار ونجد : $x_P = \dfrac{v_0^2\ \sin 2\alpha}{g}$

7 - تحديد سرعة القذيفة في اللحظة t بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة

نهمل تأثير الهواء على الجسم (الاحتكاك ودافعة ارخميدس) تكون الجملة شبه معزولة ، أي أن طاقتها الميكانيكية (الكلّيّة) تكون محفوظة .

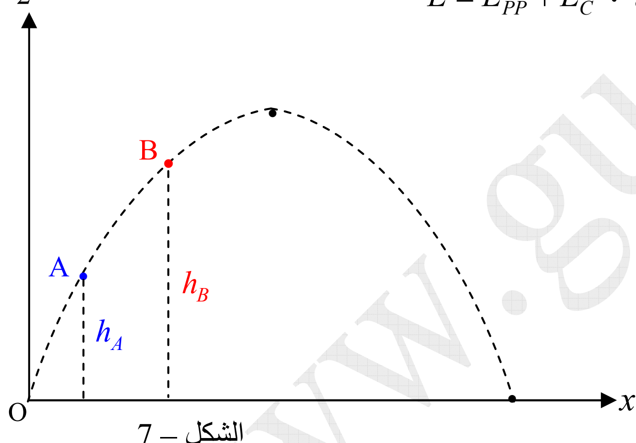
نعتبر الوضع المرجعي هوالمستوي الأفقي الذي يشمل النقطة O (الشكل – 7) .

الطاقة الميكانيكية E هي مجموع الطاقتين الكامنة الثقالية والحركية للجسم ، $E = E_{PP} + E_C$

$E_B = E_A$ لأن الطاقة الميكانيكية ثابتة .

$$mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\boldsymbol{v_B^2 = v_A^2 + 2g\left(h_A - h_B\right)}$$



الشكل – 7

8 - تمثيل الطاقة الحركية والكامنة بدلالة الزمن

8 – 1 – الطاقة الكامنة

لدينا $E_{PP} = mgz = mg\left(-\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\ t\right)$ ، باعتبار الوضع المرجعي هو المحور Ox (z يتغيّر مع الزمن)

$$E_{PP} = -\frac{1}{2}mg^2\ t^2 + mg\ v_0 \sin\alpha\ t$$

نلاحظ أن العلاقة $E_{PP} = f\left(t\right)$ عبارة عن قطع مكافيء يمر بالمبدأ و هي من الشكل $E_{PP} = at^2 + bt$ ، حيث $a < 0$

8 – 2 – الطاقة الحركية

لدينا $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ (7)

حيث أن في كل لحظة يكون $v^2 = v_x^2 + v_z^2$ (الشكل – 8)

ولدينا $v_x = v_0 \cos\alpha$ و $v_z = -gt + v_0 \sin\alpha$

بالتعويض في العلاقة (7) :

$$E_C = \frac{1}{2}m\left[v_0^2 \cos^2\alpha + (-gt + v_0 \sin\alpha)^2\right]$$

$$E_C = \frac{1}{2}mg^2t^2 - mg\ t\ v_0 \sin\alpha + \frac{1}{2}mv_0^2$$

الشكل – 8

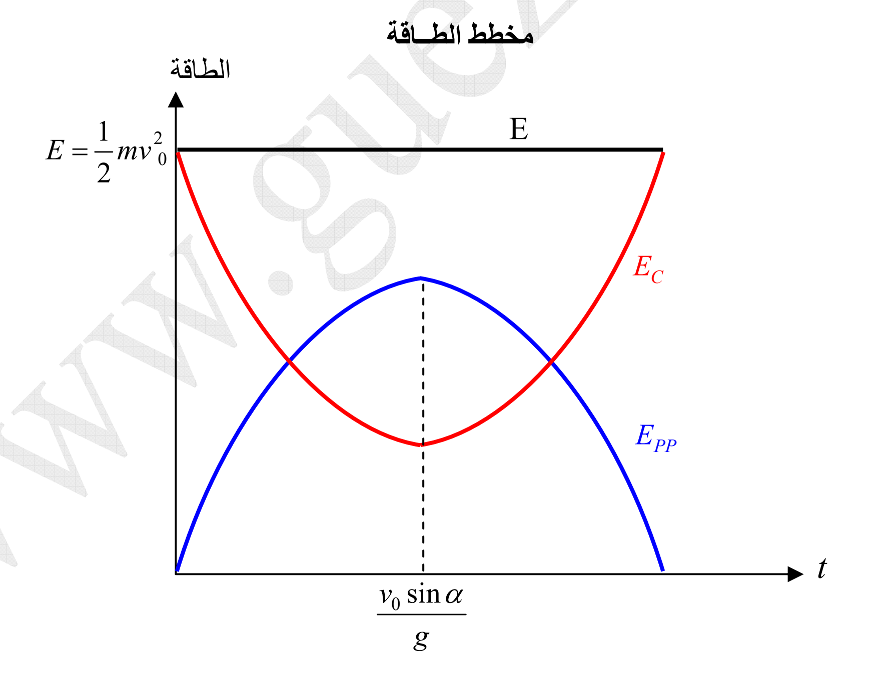
نلاحظ أن العلاقة $E_c = f(t)$ عبارة عن قطع مكافيء معادلته من الشكل $E_c = at^2 + bt + c$ ، حيث $a > 0$

8 – 3 – الطاقة الميكانيكية (الشكل – 9)

$E = E_{PP} + E_C$ ، وبالتعويض : $E = -\frac{1}{2}mg^2\ t^2 + mg\ v_0 \sin\alpha\ t + \frac{1}{2}mg^2t^2 - mg\ t\ v_0 \sin\alpha + \frac{1}{2}mv_0^2$

$E = \frac{1}{2}mv_0^2$ ، وهي ثابتة مهما كان الزمن

مخطط الطـاقة



الشكل - 9

ما يجب أن أعرفه حتى أقول : إني استوعبت هذا الدرس

1 – يجب أن اعرف أن الفيزياء الكلاسيكية (فيزياء نيوتن وغاليلي و لابلاص) استطاعت أن تفسّر الكثير من الظواهر ، بما فيها الفلكية .

2 – يجب أن أعرف أن الفيزياء الكلاسيكية عجزت عن تفسير حركات الجسيمات على مستوى الذرة .

3 – يجب أن أعرف أن طاقة الذرة مكمّمة .

4 – يجب أن أفرّق بين طيف الامتصاص وطيف الانبعاث .

5 – يجب أن أعرف سبب تشكل طيفي الامتصاص والانبعاث .

6 – يجب أن أعرف أن طيف ذرة هو خاصية تميّز الذرّة .

ملخص الدرس

1 – حدود الميكانيك الكلاسيكية

عجزت قوانين الميكانيك الكلاسيكي (غاليلي ، نيوتن ، لابلاص) وقوانين الكهرومغناطيس (ماكسويل) من تفسير تركيب الذرة وحركة الإلكترونات .

2 - الميكانيك الكمية

- تفاعلية المادة والإشعاعات تتم بواسطة تبادل الطاقة ، بحيث من أجل إشعاع تواتره ν تكون الطاقة المتبادلة عبارة عن مضاعفات لطاقة صغرى تسمى الكم ، وهي $E = h\,\nu$. h هو ثابت بلانك $h = 6,63\times10^{-34}\,J.s$ ، E (Joule)

- في الذرة تكون الطاقة غير مستمرّة ، بحيث أنها لا تأخذ إلا قيما معيّنة تسمى مستويات الطاقة .

- عندما يهبط إلكترون من مستوى طاقة E_S إلى مستوى أدنى E_i يُصدر كمّا واحدا من الإشعاع $h\nu = E_S - E_i$.

مجموعة الإشعاعات المنبعثة تشكل **طيف الإنبعاث** .

- لا يستطيع الإلكترون أن يقفز من مستوى طاقة إلى مستوى طاقة أعلى إلا إذا امتصّ كمّا واحدا $h\,\nu$.

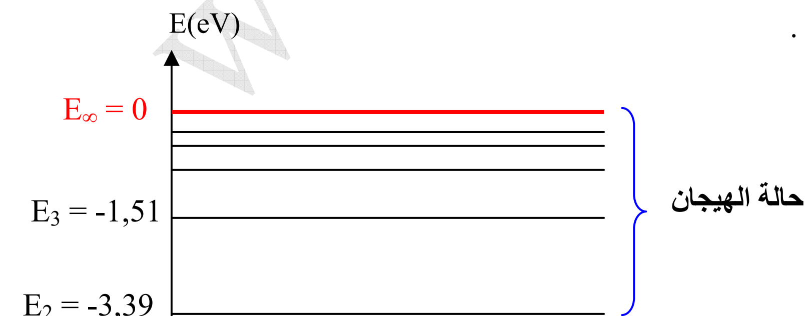
مجموعة الإشعاعات الممتصّة تسمى **طيف الامتصاص** .

مستويات الطاقة في ذرة الهيدروجين :

تُعطى طاقة المستويات في ذرة الهيدروجين بالعلاقة

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \qquad E_n(eV) .$$

السلم غير محترم في هذا التمثيل



العلاقة بين طول موجة الإشعاع وتواتره

تواتر الإشعاع يتعلق بلونه ، أي مهما كان الوسط الذي ينتشر فيه الإشعاع يبقى **التواتر ثابتا** ، أما طول الموجة يتغير حسب الوسط

$c = \lambda_{vide}\,\nu$ ، حيث c : سرعة الضوء في الفراغ $(c \approx 3 \times 10^8\ m/s)$ ، λ_{vide} : طول موجة الإشعاع في الفراغ ، ν : التواتر

الدرس

1 - أين يكمن عجز الميكانيك التقليدي (الكلاسيكي) ؟؟

- الفعل الكهروضوئي

نُسقط اشعة ضوئية بنفسجيّة على معدن التوتياء ، فتُقتلع من المعدن الإلكترونات .

نغيّر الشدة الضوئية فنتحصّل على نفس النتيجة .

نسقط أشعة ضوئية حمراء على نفس المعدن ، فمهما تكون الشدة الضوئية لا يمكن نزع الإلكترونات من المعدن .

- الأطياف الذرية

نموذج روذرفورد : (1911) : نواة موجبة تدور حولها الإلكترونات المشحونة سلبا (المادة فارغة تقريبا) .

سلبيات هذا النموذج : الإلكترون عند دورانه يُصدر اشعاعات ، فمن المفروض أنه يفقد الطاقة باستمرار ، وبالتالي يُعطي طيفا ضوئيا مستمرا ، لكن التجربة بيّنت أن الطيف غير مستمر ، أي أن الإلكترون لا يمكنه أن يشغل كل الأوضاع في الذرة كما تصوّر ذلك روذرفورد .

تصوّر أن القمر الصناعي هو الإلكترون وأن الأرض هي النواة . نعلم أن القمر الصناعي بإمكانه شغل كل الارتفاعات (طبعا حسب سرعته) . لكن الإلكترون لا يمكنه ذلك . لو كان كذلك ، فبفعل الصدمات التي تتلقاها الذرات لما وجدنا ذرات عنصر واحد كلها متشابهة

لم تتمكن الميكانيك الكلاسيكية من تفسير حركة الجسيمات على مستوى الذرة

فرضية بلانك

الطاقة الكهرومغناطيسية (الطاقة التي يحملها الضوء) لا يمكنها أن تتحول إلا بواسطة وحدات تسمى **الكم** ، بحيث يمكن إرفاق كل إشعاع وحيد اللون تواتره ν بوحدة طاقوية $E = h\nu$. h هو ثابت بلانك ، حيث $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J.s

الضوء موجة ، إذن يملك زمنا دوريا T ، وبالتالي تواترا ν يقاس بالهرتز (Hz)

فرضية أنشتاين

زيادة عن موجية الضوء ، فهو ذو طبيعة جسيمية ، يتألف من فوتونات ، بحيث يحمل كل فوتون طاقة $E = h\nu$

نموذج بوهر : (1913) : تشغل الإلكترونات في الذرة مدارات محدّدة ، بحيث لا يمكن لإلكترون أن ينتقل من مدار لآخر إلا إذا انبعث فوتون أو تمّ امتصاص فوتون .

2- مستويات الطاقة في الذرة

تملك الذرة مستويات أو سويّات للطاقة غير مستمرة . (معنى هذا أن الإلكترون لا يمكنه أن يشغل أي مكان في الذرة عندما يكتسب طاقة خارجية أو يفقد طاقة) .

اصطلاحا تُعطى للطاقة القيمة (0) في حالة تشرّد الذرة ، وكل الطاقات الأخرى تكون سالبة .

مثلا ذرة الهيدروجين : $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ ، حيث n هو رقم المدار . E_n مقاسة بـ eV .

لما تتلقى ذرة الهيدروجين طاقة خارجية يبتعد إلكترونها الوحيد عن النواة ، فإذا لم تستطيع النواة التحكم فيه تتشرد ذرة الهيدروجين ، وهذا يوافق $n \to \infty$ ، وبالتالي $E_\infty = 0$.

من أجل المدار الأول $(n = 1)$ يكون $E_1 = -13,6\ eV$ ، حيث أن هذه الطاقة توافق الذرة في حالتها الأساسية .

طيف الإصدار

عندما تكتسب الذرة طاقة خارجية تقفز الإلكترونات إلى مدارات أبعد ، وعند عودتها تصدر إشعاعات تواتراتها محدّدة بالفرق بين طاقتي المدارين اللذين إنتقل بينهما الإلكترون . هذه الإشعاعات تشكل طيفا يتالف من خطوط ألوانها توافق التواترات ν التي تحقق $E = h\nu$ ، حيث E هو الفرق بين طاقتي المدارين .

طيف الإمتصاص

عندما تكتسب الذرة طاقة كهرومغناطيسية ، يمكن أن تتمّ عملية امتصاص للفوتونات وبالتالي قفز الإلكترونات إلى مدارات أعلى في الذرة . لو حللنا الطيف الذي أسقطناه على الذرة لوجدناه يحتوي على ألوان تتخللها خطوط سوداء . هذه الخطوط السوداء هي أماكن الإشعاعات التي تمّ امتصاصها .

قدّمنا هذا الدرس بشرح مبسّط ومختصر جدّا حتى لا نتشعّب في فصوله الكثيرة ،
وهذا ما يرمي إليه هذا الجزء من البرنامج .
لقد قدّمنا فيه ما نحتاج له في حل التمارين 45 – 46 – 47 – 48 – 49 من الكتاب المدرسي